# Tres lecciones sobre la teoría de la Relatividad

Damián H. Zanette – Instituto Balseiro – 2009

# 1 Motivación y bases de la teoría

## 1.1 Contexto histórico

En 1864, James Clerk Maxwell (1831-1879) completó la síntesis teórica de los fenómenos eléctricos y magnéticos, conocidos desde la antigüedad y estudiados sistemáticamente a partir del siglo XVI. La teoría del electromagnetismo unifica la descripción de todos estos fenómenos. Como se comprobó en una serie de experimentos posteriores, la luz es una manifestación de los campos electromagnéticos, por lo que la teoría de Maxwell incluye también a los fenómenos de la óptica.

Una de las predicciones más relevantes del electromagnetismo es la de la propagación de los campos electromagnéticos. Las perturbaciones inducidas en los campos por una variación en la distribución de fuentes (cargas y corrientes) que los originan, "viajan" en el espacio, transportando energía e impulso. Las ondas luminosas son el ejemplo mejor conocido de esta fenomenología. La teoría predice también que, en el espacio libre de fuentes, las perturbaciones electromagnéticas se propagan a una velocidad que no depende de su amplitud, ni de su distribución espacial, ni de sus variaciones temporales. Por supuesto, esta es la velocidad de la luz, $c \approx 3 \times 10^{10}$ cm/s.[1]

Según la teoría de Maxwell, el valor de $c$ puede determinarse indirectamente, mediante mediciones estáticas de la permeabilidad magnética y la permitividad eléctrica del espacio libre. A principios del siglo XX, estas mediciones proveyeron los valores más precisos de $c$ obtenidos hasta entonces. De este modo, es innecesario observar la propagación de los campos para determinar $c$... pero, al mismo tiempo, se introduce una cuestión conceptualmente grave.

De acuerdo a la mecánica clásica, la velocidad es una magnitud física que depende del sistema de referencia desde el cual se observa. Por ejemplo, si en un sistema $S$ determinamos que la velocidad de una partícula es $\mathbf{v}$, la misma medición en un sistema $S'$ cuyo origen se mueve en $S$ con velocidad $\mathbf{u}$ (y que no rota con respecto a $S$), dará $\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{u}$. Ahora, si la velocidad de la luz puede determinarse indepedientemente de la observación directa de la propagación de los campos electromagnéticos, ¿en qué sistema de referencia esta propagación ocurre efectivamente con velocidad $c$? En otras palabras: ¿en qué sistema de referencia es válida la teoría de Maxwell? Responder esta pregunta constituye un paso fundamental si se pretende compatibilizar el electromagnetismo con la mecánica.

[1] Actualmente, el valor de $c$ está fijado por convención, y se utiliza en la definición de las unidades de distancia (http://www.bipm.org).

La pregunta está relacionada también con la necesidad, natural a los ojos de la física decimonónica, de que existiera un medio material que soportara la propagación de los campos electromagnéticos —tal como el aire trasmite el sonido o el agua soporta las ondas de gravedad en su superficie. Este medio material, de propiedades mecánicas desconocidas, recibió el nombre de *éter luminífero*.[2]

Todos estos interrogantes dieron lugar a la que puede considerarse, sin lugar a dudas, la serie de experimentos con resultados siempre negativos más perseverante de la historia de la física. Durante más de veinte años, a partir de 1880, una cohorte de experimentadores encabezados por los norteamericanos Michelson y Morley intentaron vanamente detectar las variaciones en la velocidad de la luz al cambiar el sistema de referencia de la medición y determinar el estado de movimiento del éter. Ni los más ingeniosos y refinados dispositivos ópticos ni los más modernos y precisos instrumentos lograron poner en evidencia la dependencia de $c$ con el sistema de referencia, predicho por la mecánica clásica, ni el más mínimo vestigio de la existencia del éter.[3]

## 1.2 Los principios de la teoría de Einstein

En un trabajo publicado en 1905, titulado *Sobre la electrodinámica de los cuerpos en movimiento*,[4] Albert Einstein (1879-1955) propuso un cambio de enfoque radical en la compatibilización del electromagnetismo y la mecánica. A diferencia de sus predecesores —y, seguramente, inspirado por los resultados permanentemente negativos de Michelson y Morley— Einstein postuló que el problema no pasa por determinar en qué sistema de referencia es válido el electromagnetismo sino, por el contrario, cómo debe modificarse la mecánica clásica para que la teoría de Maxwell valga en *todos* los sistemas de referencia (inerciales).

La propuesta de Einstein fue enunciada, en su publicación de 1905, en la forma de dos principios. El primero de ellos, el *principio de la relatividad*, es el que le da el nombre a la teoría:

**Las leyes de la física tienen la misma forma en todos los sistemas de referencia inerciales.**

Notemos que este principio también existe en la mecánica clásica —donde, a veces, se le da el nombre de principio de Galileo. En efecto, la ecuación de Newton preserva su forma al pasar de un sistema inercial a otro. En la concepción de Einstein, sin embargo, el principio de la relatividad es más amplio: ahora, "las leyes de la física" incluyen tanto a la mecánica como

[2]http://www.lhup.edu/ dsimanek/philosop/ether.htm

[3]http://galileo.phys.virginia.edu/classes/109N/lectures/michelson.html

[4]A. Einstein, Zur Elektrodynamik bewegter Körper, Ann. Phys. Lpz. 17, 891 (1905); traducción al castellano:
http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/jcuevas/Teaching/articulo-original.pdf

al electromagnetismo. La invariabilidad en la forma de las leyes físicas ante cambios del sistema de referencia se llama, en el contexto de la teoría de Einstein, *covariancia*.

El segundo principio de Einstein postula la invariancia de la velocidad de la luz:

**La velocidad de la luz en el vacío es la misma en todos los sistemas de referencia inerciales.**

Al identificar el vacío con el "medio" en que se propaga la luz —y, a la par de la luz, todos los campos electromagnéticos— la teoría prescinde de la necesidad del éter luminífero. Desde el punto de vista operacional, el principio de invariancia de $c$ es el que más consecuencias trae en la reinterpretación de los fenónemos de la mecánica. A este aspecto dedicaremos gran parte de la discusión subsiguiente.

## 1.3 ¿Cómo implementar la invariancia de $c$ en la mecánica?

El enunciado del segundo principio de Einstein plantea el problema de cómo transformar coordenadas espaciales y temporales entre sistemas de referencia inerciales de modo que la velocidad de la luz permanezca invariante ante la transformación. Revisemos primero cómo se realiza esta transformación entre sistemas inerciales en la formulación tradicional de la mecánica. Para concretar la discusión, definamos un *evento* como un par de cantidades $(\mathbf{r}, t)$ donde $\mathbf{r}$ indica una posición en el espacio y $t$ corresponde a un punto en el eje temporal. La realización física de un evento es, por ejemplo, la posición $\mathbf{r}$ de una partícula puntual a un tiempo $t$ dado. El movimiento de la partícula no es otra cosa que una sucesión continua de eventos.

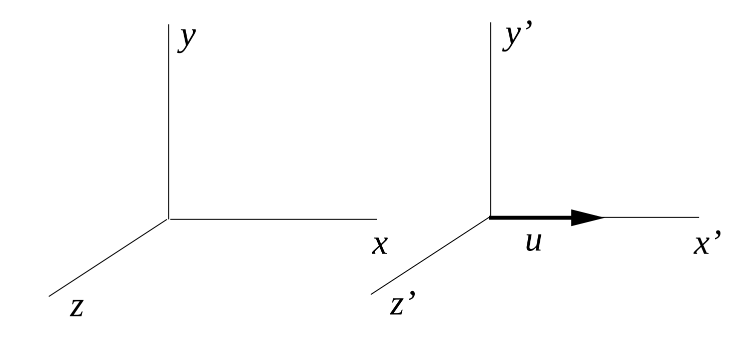



Figura 1: Dos sistemas de referencia en movimiento relativo.

Consideremos ahora dos sistemas de referencia $S$ y $S'$, con coordenadas cartesianas $(x, y, z)$ y $(x', y', z')$, tales que el origen de $S'$ se mueve respecto de $S$ con velocidad $u$, a lo largo del eje $x$ (figura 1). Supongamos que sus

orígenes coinciden a tiempo $t = 0$, y que sus ejes homólogos se mantienen mutuamente paralelos, de modo que $S'$ no rota respecto de $S$. Supongamos, además, que los orígenes de sus escalas temporales coinciden, de modo que $t' = 0$ cuando $t = 0$. Si, respecto de $S$, un evento ocurre en el punto $\mathbf{r} = (x, y, z)$ a tiempo $t$, las coordenadas del mismo evento en el sistema $S'$ serán

$$\begin{aligned} x' &= x - ut, \\ y' &= y, \\ z' &= z, \\ t' &= t. \end{aligned} \tag{1}$$

Estas son las *transformaciones de Galileo*. La última de estas ecuaciones expresa la suposición implícita, consistente con las observaciones empíricas no relativistas, de que el ritmo del transcurso del tiempo es el mismo en todos los sistemas de referencia. De las transformaciones de Galileo deducimos inmediatamente la relación entre velocidades medidas en $S$ y en $S'$:

$$\begin{aligned} v'_x &= \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx}{dt} - u = v_x - u, \\ v'_y &= \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{dt} = v_y, \\ v'_z &= \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{dt} = v_z. \end{aligned} \tag{2}$$

Evidentemente, debido a la forma de la primera de estas ecuaciones, el módulo del vector velocidad no es en general invariante al cambiar el sistema de referencia, sea igual a $c$ o no. Por lo tanto, las transformaciones de Galileo no son compatibles con el segundo principio de Einstein.

En 1905, el problema de hallar las transformaciones compatibles con la invariancia de la velocidad de la luz ya había sido resuelto por Lorentz, en el marco del electromagnetismo.[5] En efecto, este problema es equivalente a encontrar tranformaciones de coordenadas espaciales y temporales que dejen invariante la ecuación de las ondas electromagnéticas, que se deduce de las ecuaciones de Maxwell. Las *transformaciones de Lorentz* entre sistemas $S$ y $S'$ como los considerados más arriba son las siguientes:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \\ y' &= y, \\ z' &= z, \\ t' &= \frac{t - xu/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \end{aligned} \tag{3}$$

[5] O. Darrigol, The genesis of the theory of relativity, Séminaire Poincaré 1, 1 (2005), http://www.bourbaphy.fr/darrigol2.pdf

Desde el punto de vista de la mecánica no relativista, un aspecto inquietante de estas transformaciones es que el tiempo no resulta ser invariante al cambiar de sistema de referencia: $t' \neq t$. Otro hecho interesante es que las transformaciones de Lorentz están bien definidas (en el dominio de los números reales) sólo para $u < c$, es decir, cuando la velocidad relativa de los sistemas de referencia considerados es menor que la velocidad de la luz.

Derivando las ecuaciones (3), es posible mostrar que las transformaciones de Lorentz implican, para las velocidades en cada sistema,

$$\begin{aligned} v'_x &= \frac{v_x - u}{1 - v_x u/c^2}, \\ v'_y &= v_y \frac{\sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 - v_x u/c^2}, \\ v'_z &= v_z \frac{\sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 - v_x u/c^2}. \end{aligned} \tag{4}$$

**Ejercicio 1**: A partir de las transformaciones de Lorentz, ecuaciones (3), obtener las leyes relativistas de transformación de velocidades, ecuaciones (4).

Mostremos, en un caso particular, que las ecuaciones (4) dejan invariantes la velocidad de la luz. Supongamos que en el sistema $S$ la velocidad que deseamos transformar tiene sólo componente en la dirección $x$, es decir, que $v_y = v_z = 0$. De las ecuaciones (4) vemos que en $S'$ la velocidad tendrá sólo componente $x'$. En esta situación, efectivamente, cuando $v_x = c$ obtenemos $v'_x = c$, y cuando $v_x = -c$ obtenemos $v'_x = -c$. En el ejercicio 2, propuesto a continuación, se muestra que las ecuaciones (4) dejan invariante el módulo de la velocidad cualquiera sea su dirección.

**Ejercicio 2**: Mostrar que si el módulo de la velocidad en el sistema $S$, dado por $v = (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)^{1/2}$, es igual a $c$, las ecuaciones (4) implican que el módulo de la velocidad en $S'$ también es igual a $c$.

**Ejercicio 3**: En el caso en que $v_y = v_z = 0$, graficar el cociente $v'_x/c$ como función de $v_x/c$, ambos variando entre $-1$ y 1, para diferentes valores de $u/c$.

# 2 Propiedades de las transformaciones de Lorentz

La manipulación algebraica de las transformaciones de Lorentz se simplifica considerablemente introduciendo algo de notación apropiada. En su forma completa, ésta se denomina *notación covariante*. Para empezar, tomando las coordenadas espaciales $(x, y, z)$ y temporal $t$ de un evento, definiremos un conjunto ordenado de cuatro cantidades $X = (ct, x, y, z)$, al que se denomina *cuadrivector posición*.[6] El espacio de cuatro dimensiones formado por los cuadrivectores posición de todos los eventos se denomina *espacio de Minkowski*, o espacio–tiempo. El factor $c$ en la coordenada *temporal* se introduce para homogeneizar las unidades de las cuatro componentes del cuadrivector. Las otras tres componentes se llaman *espaciales*.

Las transformaciones de Lorentz son lineales. En efecto, de las ecuaciones (3) vemos que las coordenadas del cuadrivector posición en $S'$ están dadas por una combinación lineal de las coordenadas en $S$. La velocidad relativa de los sistemas de referencia, $u$, actúa como parámetro de la transformación. Prosiguiendo con la simplificación de la notación, definimos los parámetros $\beta = u/c$ y $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$.

Aprovechando la introducción del cuadrivector posición, la linealidad de las transformaciones de Lorentz permite escribirlas en forma matricial, como

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Llamemos $\Lambda$ a la matriz (*de Lorentz*) que define esta ecuación, a la que podemos reescribir como $X' = \Lambda X$. Nótese la bella simetría que adquirieron las transformaciones gracias a la notación utilizada.

**Ejercicio 4**: A partir de las ecuaciones (3) obtener la ecuación (5).

## 2.1 La transformación inversa y el límite no relativista

Si, para nuestro par de sistemas de referencia, quisiéramos calcular las coordenadas de un evento en $S$ como función de las coordenadas en $S'$, deberíamos encontrar la tranformación inversa a la definida por la ecuación (5). Esto equivale a invertir la matriz de Lorentz $\Lambda$: $X = \Lambda^{-1} X'$.

Otra forma de obtener la transformación inversa es notar que el sistema $S$ se mueve respecto de $S'$ con velocidad $-u$. El cambio de coordenadas al pasar de $S'$ a $S$, por lo tanto, tiene la misma forma que la ecuación (5), sólo que la velocidad relativa de los sistemas debe cambiarse de signo, es decir,

[6] En estas lecciones usaremos la letras mayúsculas para indicar cuadrivectores. Esta **no** es la notación convencional en la formulación covariante.

$\beta \to -\beta$. El resultado es entonces

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}. \tag{6}$$

**Ejercicio 5**: Mostrar que la matriz en la ecuación (6) es $\Lambda^{-1}$.

El *límite no relativista* de las tranformaciones de Lorentz —es decir, las transformaciones de Galileo, ecuaciones (1)— se define cuando la velocidad relativa de los sistemas de referencia es pequeña comparada con $c$. En efecto, si hacemos tender $\gamma \to 1$ y $\beta x \to 0$ obtenemos las transformaciones de Galileo. Nótese cuidadosamente que, en este límite, el producto $\beta ct = ut$ no cambia.

**Ejercicio 6**: Obtener las transformaciones de Galileo como límite de las de Lorentz.

## 2.2 Contracción de Lorentz y simultaneidad

Consideremos una barra de extremos $A$ y $B$, paralela al eje $x$ de un sistema de referencia $S$. Vista desde ese sistema, la barra se mueve con velocidad $u$ en la dirección $x$ (figura 2). Se sabe además que, cuando está en reposo, la longitud de la barra es $L$.

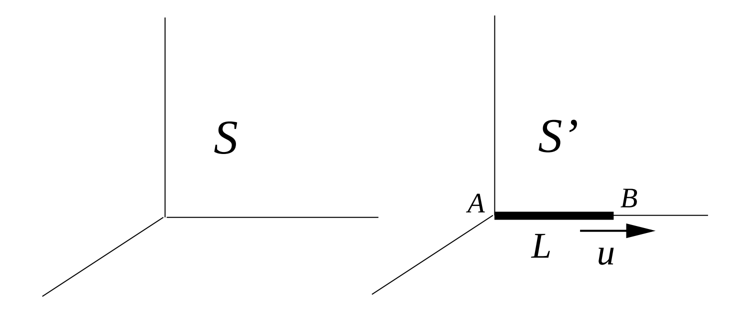



Figura 2: Una barra en movimiento en el sistema $S$.

Nuestro objetivo en esta sección es demostrar que la longitud de la barra medida en el sistema de referencia $S$, respecto del cual la barra se mueve, es *menor* que $L$. Este fenómeno, inexistente en la mecánica no relativista, se conoce con el nombre de *contracción de Lorentz*: la longitud de un cuerpo que se mueve, medida en la dirección del movimiento, es menor que en reposo. Durante nuestra demostración, además, tendremos oportunidad de

comprobar que el concepto de *simultaneidad* depende del sistema de referencia utilizado.

Introduzcamos un sistema $S'$ fijo a la barra, con origen en el extremo $A$ y cuyos ejes sean mutuamente paralelos a los del sistema $S$, de modo de encontrarnos en la situación considerada en la figura 1. En el sistema $S'$ los puntos $A$ y $B$ están inmóviles y, dado que la barra está en reposo, la distancia de $A$ a $B$ es $L$. Los cuadrivectores posición correspondientes a los puntos $A$ y $B$ a un dado tiempo $t'$ son, respectivamente, $(ct', 0)$ y $(ct', L)$ (omitimos indicar las otras dos coordenadas espaciales, que son nulas tanto en $S$ como en $S'$: $y = z = y' = z' = 0$).

Para encontrar los correspondientes cuadrivectores en el sistema $S$, utilizamos las transformaciones de Lorentz inversas, ecuación (6), restringida a la coordenada temporal y la primera espacial:

$$\begin{pmatrix} ct_A \\ x_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} ct_B \\ x_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ L \end{pmatrix}, \tag{7}$$

lo cual nos da

$$\begin{aligned} ct_A &= \gamma ct', \quad ct_B = \gamma ct' + \gamma\beta L, \\ x_A &= \gamma ut', \quad x_B = \gamma ut' + \gamma L. \end{aligned} \tag{8}$$

Este resultado nos permite, en primer lugar, apreciar una consecuencia peculiar de las transformaciones de Lorentz. Para determinado valor de $t'$ —es decir, en un dado instante en el sistema $S'$— los tiempos correspondientes en $S$, $t_A$ y $t_B$, son *distintos*. Los eventos dados por las posiciones de los puntos $A$ y $B$ a un dado tiempo $t'$, que son simultáneos en $S'$, ocurren a tiempos diferentes en $S$. En general, de hecho, dos eventos con diferentes coordenadas espaciales que son simultáneos en un dado sistema de referencia, ocurren a tiempos diferentes en cualquier sistema en movimiento respecto del primero. En el marco de la teoría de Einstein, entonces, la simultaneidad es un concepto relativo al sistema de referencia utilizado.

La determinación de la longitud de la barra en $S$, sin embargo, requiere observar la posición de sus dos extremos en el *mismo instante de tiempo* $t$. Este procedimiento, en efecto, *define* el proceso de medición de una longitud. Esto implica que el tiempo $t'_A$ (medido en $S'$) al cual debemos determinar la posición del punto $A$ en el sistema $S$ es diferente del tiempo $t'_B$ al que determinaremos la posición de $B$. Pidiendo entonces que $ct_A = \gamma ct'_A = ct$ y que $ct_B = \gamma ct'_B + \gamma\beta L = ct$, obtenemos $t'_A = t/\gamma$ y $t'_B = t/\gamma - \beta L/c$. Reemplazando estos dos valores de $t'$ en las correspondientes expresiones para las coordenadas espaciales de las ecuaciones (8) obtenemos, en el sistema $S$,

$$x_A = ut, \qquad x_B = ut + \sqrt{1-\beta^2}L. \tag{9}$$

La longitud de la barra en $S$ está dada por la diferencia

$$x_B - x_A = \sqrt{1-\beta^2}L < L. \tag{10}$$

Como adelantamos, entonces, en un sistema de referencia respecto del cual la barra se mueve, ésta es más corta que en reposo.

**Ejercicio 7**: Reproducir los cálculos que, a partir de la ecuación (7), llevan a demostrar la contracción de Lorentz.

**Ejercicio 8**: Graficar el cociente entre la longitud de la barra en movimiento y su longitud en reposo como función de su velocidad.

## 2.3 Dilatación del tiempo

Un efecto en cierto sentido complementario a la contracción de Lorentz tiene lugar si consideramos dos eventos que ocurren en el mismo lugar pero a diferentes tiempos en un sistema de referencia en movimiento respecto de otro. Tomemos, por ejemplo, dos eventos ocurridos en el origen del sistema $S'$ a tiempos $t'_1$ y $t'_2$. Una aplicación inmediata de las transformaciones de Lorentz inversas, nos permite mostrar que los correspondientes tiempos en $S$ satisfacen:

$$t_2 - t_1 = \gamma(t'_2 - t'_1) > t'_2 - t'_1. \qquad (11)$$

En otras palabras, el intervalo temporal entre los dos eventos medido en $S$ es *mayor* que medido en $S'$. Si generalizamos esta conclusión para una sucesión cualquiera de eventos, podemos afirmar que los procesos asociados a cualquier objeto ocurren más lentamente si el objeto está en movimiento que si está en reposo.

**Ejercicio 9**: Obtener la dilatación del tiempo a partir de las transformaciones de Lorentz.

**Ejercicio 10**: En reposo, la efímera —o cachipolla (*Ephemera sp.*), insecto del orden Ephemeroptera— vive exactamente 24 horas. ¿Cuánto durará su (no tan) efímera existencia si se mantiene en vuelo a 299.000 kilómetros por segundo?

## 2.4 Una aplicación: Lluvia de muones

Los *muones* son partículas subatómicas inestables, que se desintegran en electrones y neutrinos.[7] En reposo, la vida de un muón puede variar entre $10^{-6}$ y $10^{-5}$ segundos, con un valor medio de unas $2,2$ millonésimas de segundo. La principal fuente natural de los muones que observamos en nuestro planeta son las colisiones de los rayos cósmicos, principalmente protones, con núcleos de átomos ubicados en capas atmosféricas entre 15 y 20 kilómetros de altura. Estas colisiones son extremadamente energéticas, y producen piones que —al cabo de un viaje de pocos metros— decaen en

[7] http://en.wikipedia.org/wiki/Muon

muones y neutrinos. Los muones así producidos ingresan en la atmósfera casi a la velocidad de la luz y llegan a la superficie de la Tierra, donde pueden detectarse mediante instrumentos apropiados. Cada minuto, llegan a cada metro cuadrado de la superficie terrestre alrededor de diez mil muones.

El cálculo cinemático no relativista nos muestra inmediatamente que, aunque se moviera a la velocidad de la luz, un muón no sería capaz de viajar más que unos pocos kilómetros antes de desintegrarse, de modo que nunca llegaría a la superficie terrestre. El efecto relativista de la dilatación del tiempo, en cambio, predice que la vida del muón en movimiento será más larga, de modo que eventualmente logrará recorrer los 15 ó 20 kilómetros que lo separan de la supericie terrestre antes de decaer.

¿Cómo se compatibiliza este resultado con la misma observación hecha desde un sistema de referencia que acompaña al muón en su movimiento? En este sistema, la vida del muón es corta pero, gracias al efecto de contracción de Lorentz, también es corto el trayecto que debe recorrer para llegar a la superficie terrestre. En cualquiera de los dos sistemas de referencia —el fijo a la Tierra y el fijo al muón— nuestra partícula siempre tiene suficiente tiempo como para completar su recorrido.

**Ejercicio 11**: Un muón se mueve en la atmósfera al $99,5$ % de la velocidad de la luz. ¿Cuál debe ser su tiempo de vida (medido en reposo) para que pueda penetrar 15 kilómetros antes de desintegrarse? ¿Cuánto mide ese mismo trayecto en un sistema de referencia en que el muón se encuentra en reposo?

**Ejercicio 12**: Un garage de 3 metros de largo tiene puertas tanto en su pared delantera como en la trasera. Inicialmente, la trasera está cerrada y la delantera abierta, y hacia ésta se dirige un automóvil. El auto mide, en reposo, $3,5$ metros de largo, pero se mueve tan rápido que su longitud es de 3 metros. Un mecanismo ultrasecreto hace que, en el momento en que el auto ha penetrado completamente en el garage, la puerta delantera se cierre y, simultáneamente, se abra la trasera, de modo que el auto emerge sin un rasguño. Describir este mismo proceso desde un sistema de referencia que se mueve con el auto, donde —como ya dijimos— éste mide $3,5$ metros, pero el garage mide menos de 3 metros.

## 2.5 El intervalo invariante

Consideremos ahora dos eventos con coordenadas espaciotemporales dadas por los cuadrivectores $X_1 = (ct_1, x_1, y_1, z_1)$ y $X_2 = (ct_2, x_2, y_2, z_2)$, e introduzcamos la cantidad

$$\begin{aligned} \delta s^2 &= c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 \\ &\equiv c^2 \delta t^2 - \delta x^2 - \delta y^2 - \delta z^2. \end{aligned} \tag{12}$$

Es posible mostrar que, ante las transformaciones de Lorentz, $\delta s^2$ es invariante. Esto significa que si transformamos las coordenadas de ambos eventos y, con las coordenadas transformadas $X'_1 = (ct'_1, x'_1, y'_1, z'_1)$ y $X'_2 = (ct'_2, x'_2, y'_2, z'_2)$, realizamos el mismo cálculo que en la ecuación (12), obtendremos exactamente el mismo resultado:

$$c^2\delta t'^2 - \delta x'^2 - \delta y'^2 - \delta z'^2 = \delta s^2 = c^2\delta t^2 - \delta x^2 - \delta y^2 - \delta z^2. \qquad (13)$$

Llamamos a $\delta s$ *intervalo invariante* entre los dos eventos considerados.

**Ejercicio 13**: Mostrar que la cantidad $\delta s^2$ definida por la ecuación (12) es invariante ante las transformaciones de Lorentz.

El intervalo invariante $\delta s$ cumple, respecto de las transformaciones de Lorentz, un papel similar al de la distancia euclideana respecto de las rotaciones en el espacio tridimensional. En efecto, una rotación cambia las coordenadas de un punto del espacio pero no altera la distancia entre puntos. Del mismo modo, las transformaciones de Lorentz modifican las coordenadas del cuadrivector posición, pero el intervalo invariante no cambia. Al igual que lo que sucede con la distancia euclideana, la existencia del intervalo invariante de las transformaciones de Lorentz permite definir una *métrica* en el espacio tetradimensional de Minkowski. En esa métrica, el intervalo invariante entre el cuadrivector posición $X$ y el origen del espacio de Minkowski define el módulo de $X$, cuyo cuadrado vale $X^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$. Por construcción, $X^2$ no varía al cambiar el sistema de referencia.

El intervalo invariante de las transformaciones de Lorentz combina dos cantidades que, independientemente una de la otra, resultan invariantes ante las transformaciones de Galileo. Estas son, por un lado, el intervalo temporal $\delta t$ y, por otro, la distancia $d = (\delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2)^{1/2}$. En efecto, en la mecánica no relativista, el intervalo temporal y la distancia espacial entre dos eventos cualesquiera no se modifican al pasar de un sistema de referencia a otro. En la mecánica relativista, en cambio, estas dos cantidades no permanecen invariantes independientemente, sino que se combinan en el único invariante $\delta s^2$.

**Ejercicio 14**: De dos eventos con $\delta s^2 < 0$ se dice que están separados por un intervalo de *tipo espacial*, mientras que si $\delta s^2 > 0$ se dice que el intervalo es de *tipo temporal*. Mostrar que, dados dos eventos con intervalo espacial, existe un sistema de referencia en que ambos son simultáneos. Mostrar que, dados dos eventos con intervalo temporal, existe un sistema de referencia en que ambos ocurren en el mismo punto del espacio. Finalmente, mostrar que si $\delta s^2 = 0$ los dos eventos pueden ser unidos por una señal luminosa.

**Ejercicio 15**: ¿Es posible que si en un dado sistema de referencia el evento $A$ ocurre antes que el $B$, exista otro sistema de referencia donde ese orden se invierte? ¿Qué ocurre si hay un vínculo causal entre los dos eventos?

# 3 Introducción a la dinámica relativista

Las leyes de la dinámica relativista se formulan por afinidad con las de la mecánica newtoniana, teniendo en mente una forma del *principio de correspondencia* que establece que ambas descripciones deben coincidir en el límite de bajas velocidades. Como para cualquier otra teoría física, en todo caso, la validación de tal formulación pasa por comparar sus predicciones con resultados experimentales.

Un aspecto importante a tener en cuenta al formular la dinámica relativista es que esperamos que se cumpla en principio de la relatividad, enunciado en la sección 1.2. Como iremos viendo a lo largo de esta lección, la invariancia de las leyes de la mecánica ante cambios entre sistemas inerciales está basada en la posibilidad de escribir estas leyes en términos de cantidades *covariantes*, es decir, cantidades que pueden transformarse entre sistemas de referencia utilizando las transformaciones de Lorentz —en forma análoga a como se transforma el cuadrivector posición. Nuestro programa es, entonces, construir cantidades tetradimensionales que cumplan roles análogos al de la velocidad, el impulso, la fuerza, en base a las cuales luego escribiremos las ecuaciones de movimiento en su versión relativista.

## 3.1 Tiempo propio

Consideremos una partícula en movimiento, y tomemos dos eventos dados por la posición de la partícula en dos tiempos separados infinitesimalmente por un intervalo $dt$. Si $dx$, $dy$ y $dz$ son las variaciones ocurridas en cada una de las coordenadas espaciales durante el intervalo $dt$, el intervalo invariante asociado a los dos eventos —tal como lo definimos en la sección 2.5— estará dado por

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \equiv c^2 d\tau^2. \tag{14}$$

La última relación en esta ecuación introduce, a partir del intervalo invariante $ds$, una cantidad $d\tau$ a la que llamaremos (diferencial de) *tiempo propio*.

El nombre de tiempo propio está motivado por la siguiente interpretación de la cantidad $d\tau$. Consideremos un sistema de referencia —llamémoslo $S'$— que, a lo largo del intervalo diferencial de tiempo $dt$, acompaña a la partícula en su movimiento, con la misma velocidad. En $S'$ la partícula está en reposo, de modo que las variaciones en cada coordenada espacial en ese sistema son nulas: $dx' = dy' = dz' = 0$. Como $ds^2$ es invariante, debe cumplirse que $ds^2 = c^2 dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 = c^2 dt'^2$. Por definición, entonces, $d\tau = dt'$ no es otra cosa que el intervalo de tiempo medido en el sistema en que la partícula está en reposo.

Dado que, de acuerdo a esta interpretación, $d\tau$ corresponde a una cantidad medida en un sistema de referencia específico —el que acompaña a la partícula en su movimiento— su valor no depende del sistema de referencia utilizado. Esta observación es consistente con la definición de $d\tau$

como una cantidad proporcional al intervalo invariante. El tiempo propio proporcionará la base para definir derivadas temporales en la formulación covariante de la mecánica.

Por convenicencia futura, escribamos la ecuación (14) de la siguiente manera:

$$\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 = 1 - \frac{1}{c^2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] = 1 - \frac{v^2}{c^2}, \tag{15}$$

donde $v$ es el módulo de la velocidad que tiene la partícula durante el diferencial $dt$. La ecuación (15) define la relación diferencial entre el tiempo propio y el tiempo medido en el sistema desde donde se observa a la partícula.

## 3.2 El cuadrivector velocidad

Dada la linealidad de las transformaciones del Lorentz, discutida al comienzo de la lección 2, queda claro que un incremento diferencial en las coordenadas del cuadrivector posición, $dX = (c\,dt, dx, dy, dz)$, cambiará entre sistemas de referencia siguiendo las mismas transformaciones:

$$dX' = \Lambda dX. \tag{16}$$

Retomando el diferencial de tiempo propio definido en la sección anterior para una partícula en movimiento, introduzcamos ahora el conjunto ordenado de cuatro cantidades

$$V = \frac{dX}{d\tau} = \left(c\frac{dt}{d\tau}, \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau}\right), \tag{17}$$

donde las coordenadas espaciales de $dX$ indican la variación en la posición de la partícula en el tiempo $dt$, correspondiente al intervalo de tiempo propio $d\tau$.

Desde un punto de vista algebraico, $V$ es el cociente de un cuadrivector diferencial, $dX$, cuyas ocordenadas cambian entre sistemas de referencia siguiendo las transformaciones de Lorentz, y una cantidad también diferencial, $d\tau$, que —como vimos en la sección anterior— es invariante ante esas transformaciones. Las cuatro cantidades que definen $V$, por lo tanto, forman un conjunto de magnitudes físicas que cambian entre sistemas de referencia siguiendo las mismas leyes de transformación que $X$. Esta propiedad define, precisamente, el objeto covariante al que llamamos genéricamente *cuadrivector*.

No inesperadamente, $V$ recibe el nombre de *cuadrivector velocidad*. Para expresar más explícitamente sus coordenadas, podemos utilizar la relación entre $d\tau$ y $dt$ dada por la ecuación (15). Obtenemos

$$V = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}(c, v_x, v_y, v_z), \tag{18}$$

donde, recordemos, $v_x = dx/dt$, $v_y = dy/dt$, $v_z = dz/dt$, y $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$. El cuadrivector velocidad, entonces, consta de un prefactor con la misma forma que el coeficiente $\gamma$ de las transformaciones de Lorentz, pero donde la velocidad involucrada es la de la partícula. Llamémoslo $\gamma_v$:

$$\gamma_v = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}. \tag{19}$$

El prefactor $\gamma_v$ multiplica, en la componente temporal de $V$, a la velocidad de la luz y, en las restantes componentes, al vector velocidad de la partícula, $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$.

El cuadrivector $V$ contiene la misma información física que la velocidad $\mathbf{v}$ de la partícula definida en su forma tradicional, como vector tridimensional. Por construcción, sin embargo, $V$ tiene la estructura apropiada para ser transformado entre sistemas de referencia utilizando las transformaciones de Lorentz.

**Ejercicio 16**: Transformando el cuadrivector velocidad entre sistemas de referencia inerciales, $V' = \Lambda V$, reobtener las leyes de transformación de las velocidades, ecuaciones (4).

Así como en el espacio de Minkowski el intervalo invariante entre eventos no cambia al tranformar entre sistemas de referencia, el intervalo entre dos cuadrivectores velocidad también es un invariante de Lorentz. En particular, el módulo de $V$ —es decir, el intervalo invariante entre $V$ y el origen del espacio de los cuadrivectores velocidad— debe ser invariante. En efecto,

$$V^2 = \gamma_v^2 (c^2 - v_x^2 - v_y^2 - v_z^2) = c^2. \tag{20}$$

Vemos que, cualquiera sea la velocidad de la partícula, el módulo al cuadrado de su cuadrivector velocidad vale siempre $c^2$, ciertamente, un invariante en la teoría de Einstein.

## 3.3 Masa, impulso, energía, y la ecuación de Newton

A fin de continuar con la construcción de la dinámica relativista es necesario extender el concepto tradicional de masa. Optando por la correspondencia más sencilla, definimos la *masa* $m$ de una partícula como la cantidad análoga de la mecánica newtoniana medida con la partícula **en reposo**. Así definida, la masa es un invariante relativista, ya que no depende del sistema de referencia desde el que se observa a la partícula.

La introducción de la masa como invariante relativista permite definir inmediatamente el *cuadrivector impulso lineal* de la partícula, mutiplicando $m$ por el cuadrivector velocidad:

$$P = mV = m\gamma_v (c, v_x, v_y, v_z). \tag{21}$$

Esta es nuestra primera cantidad cuadrivectorial con contenido dinámico. Nos encontramos, entonces, en condiciones de hacer una propuesta sobre la forma de las leyes dinámicas de la relatividad. En primer lugar, consideremos el caso de una partícula **libre de fuerzas**. Se propone que el cuadrivector impulso de tal partícula satisface la ecuación

$$\frac{dP}{d\tau} = 0. \tag{22}$$

Claramente, esta ecuación tiene estructura covariante, de modo que satisface el principio de la relatividad de Einstein. Su validez, sin embargo, debe comprobarse experimentalmente. Si bien es posible dar sólidos argumentos de plausibilidad que justifican la forma de esta ecuación —de los cuales hay infinidad de ejemplos en la literatura— no debemos perder de vista que se trata de una hipótesis a ser verificada empíricamente. La ecuación propuesta es formalmente análoga a la conservación del impulso lineal en la mecánica no relativista, una ley que resulta de observaciones experimentales.

Veamos qué implica la ecuación (22), analizándola componente a componente. Para las componentes espaciales —por ejemplo, la primera— tenemos

$$\frac{d}{dt}(m\gamma_v v_x) = 0. \tag{23}$$

Esta ecuación establece la conservación de una cantidad que, en el límite no relativista, $\gamma_v \to 1$, coincide con la componente $x$ del momento lineal. Por analogía con la cantidad no relativista, denotamos $p_x = m\gamma_v v_x$. Procediendo en forma análoga con las componente $y$ y $z$, definimos el *impulso lineal relativista* de la partícula como $\mathbf{p} = m\gamma_v \mathbf{v}$. La ecuación (22) implica que, en ausencia de fuerzas, $\mathbf{p}$ se conserva. Notemos cuidadosamente, sin embargo, que $\mathbf{p}$ coincide con el impulso lineal no relativista sólo en el correspondiente límite.

Vale la pena mencionar que, para enfatizar la analogía entre el impulso lineal relativista $\mathbf{p} = m\gamma_v \mathbf{v}$ y su contraparte no relativista, a veces se introduce la masa "efectiva" de la partícula,

$$m_v = m\gamma_v, \tag{24}$$

dependiente de la velocidad, en función de la cual podemos escribir $\mathbf{p} = m_v \mathbf{v}$, formalmente, la misma expresión que en la mecánica de Newton.

La componente temporal de la ecuación (22) implica

$$\frac{d\gamma_v}{dt} = 0. \tag{25}$$

Esta ecuación también expresa una ley de conservación. Para comprender su significado, analicémosla en el límite de bajas velocidades. Desarrollando

$\gamma_v$ en potencias de $v$, y multiplicando por un factor conveniente, la ecuación (25) implica

$$\frac{d}{dt}\left(mc^2 + \frac{m}{2}v^2 + \cdots\right) = 0, \tag{26}$$

donde los términos no escritos son de grado mayor en $v$. En el segundo término reconocemos a la energía cinética newtoniana de la partícula. Como los términos despreciados son de orden superior en la velocidad, sería posible sugerir que la cantidad dentro del paréntesis es el equivalente relativista de la energía cinética, que se reduce a su correspondiente no relativista para bajas velocidades. Sin embargo, la cantidad en cuestión contiene un término adicional, $E_0 \equiv mc^2$, sin equivalente en la mecánica newtoniana. Como este término adicional está presente aun cuando la velocidad se anule, y como tiene obviamente unidades de energía, lo llamaremos *energía en reposo* de la partícula.

Si bien podríamos estar tentados a deshacernos de la energía en reposo como un término constante cuyo único efecto es desplazar el origen de la escala de energías, la ecuación (26) muestra que $E_0$ participa de una ley de conservación en combinación con la energía cinética. En un proceso de desintegración de partículas —como, por ejemplo, el que discutimos para los muones en la lección anterior— la energía de los productos de la desintegración debe dar cuenta tanto de la energía cinética como de la energía en reposo de la partícula desintegrada. Este contenido energético asociado a la mera existencia de masa —sin movimiento y en ausencia de fuerzas— es, por supuesto, el origen de las grandes cantidades de energía que pueden desencadenarse en las reacciones entre partículas subatómicas.

**Ejercicio 17**: Obtener la ecuación (26) a partir de la (25), desarrollando hasta orden $v^4$.

**Ejercicio 18**: ¿Qué masa de agua será posible calentar desde temperatura ambiente hasta la ebullición con la energía en reposo de un gramo de materia?

La cantidad $E = m\gamma_v c^2$, cuyo desarrollo para bajas velocidades coincide con la expresión en el paréntesis de la ecuación (26), es la *energía relativista* de la partícula de masa $m$ y velocidad $v$, libre de fuerzas externas. En términos de la masa "efectiva" $m_v$, se escribe

$$E = m_v c^2, \tag{27}$$

que no es otra cosa que la famosa fórmula de Einstein, discutida por él mismo en un artículo también aparecido en 1905, y titulado *¿Depende la inercia de un cuerpo de su contenido energético?* [8]

[8] A. Einstein, Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energieinhalt abhängig?, Ann. Phys. Lpz. 18, 639 (1905).

Las definiciones de impulso lineal y energía relativistas permite escribir el cuadrivector impulso lineal como

$$P = \left( \frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z \right). \tag{28}$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones (21) y (20), vemos inmediatamente que el módulo al cuadrado del cuadrivector impulso lineal debe ser $P^2 = m^2c^2$. Expresando $P^2$ explícitamente como función de $E$ y $\mathbf{p}$ obtenemos la *relación de dispersión* relativista, entre la energía y el impulso de una partícula libre:

$$E^2 = m^2c^4 + c^2p^2 = E_0^2 + c^2p^2, \tag{29}$$

donde $p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$.

**Ejercicio 19**: Mediante un experimento de desintegración de electrones y positrones, se comprueba que la energía y el impulso lineal de cada uno de los fotones resultantes de la desintegración satisfacen la relación $E = cp$ ¿Cuál es la masa de un fotón? ¿Cuál es su velocidad?

La ecuación (28) nos muestra que el cuadrivector impulso combina en una sola cantidad covariante el impulso y la energía, en el mismo sentido que el cuadrivector posición combina las coordenadas espaciales y las temporales. La ecuación (22), por su parte, expresa en una única relación covariante la conservación del impulso lineal y de la energía de una partícula libre de fuerzas.

Dado el contexto en que se introdujo la teoría de la relatividad especial, las fuerzas que resulta posible considerar en el marco de la dinámica relativista son las electromagnéticas, es decir, las que resultan de la interacción entre partículas cargadas a través de los campos eléctricos y magnéticos que ellas mismas generan. Una descripción detallada de estas interacciones excede el marco de nuestra presentación. Sin embargo, en vista de lo que hemos aprendido sobre la forma covariante de las leyes de la mecánica, prevemos que será posible introducir un cuadrivector fuerza, $F$, tal que la ecuación (22) se generalice a

$$\frac{dP}{d\tau} = F, \tag{30}$$

es decir, el análogo relativista de la *ecuación de Newton*. Los resultados de una serie clásica de experimentos, como los de Kaufmann y Bucherer o la observación del movimiento de cargas es aceleradores de diversas configuraciones de campo, muestran que la definición apropiada del cuadrivector fuerza es

$$F = \gamma_v \left( \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}}{c}, F_x, F_y, F_z \right), \tag{31}$$

donde $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)$ es el vector fuerza (de Lorentz, para las interacciones electromagnéticas), y $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$ indica el producto escalar entre fuerza y velocidad.

Componente a componente, la ecuación de movimiento (30) implica

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}, \qquad \frac{dE}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}, \tag{32}$$

en completa analogía con la dinámica no relativista.

**Ejercicio 20**: Mostrar que, bajo la acción de una fuerza constante, la aceleración de una partícula que inicialmente está en reposo disminuye progresivamente, de modo que la velocidad se acerca asintóticamente a $c$. ¿Cómo varía la energía relativista de la partícula?

